Uitwerking toets

Opgave 1. (10 pt)

Enerzijds:

$$
\begin{array}{ll}
 & x \in A \cap (A \cup B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ definitie } \cap \text{ } \} \\
 & x \in A \wedge x \in (A \cup B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ logica } \} \\
 & x \in A
\end{array}
$$

Anderzijds:

$$
\begin{array}{ll}
 & x \in A \\
\Rightarrow & \{ \text{ logica } \} \\
 & x \in A \wedge (x \in A \vee x \in B) \\
\Rightarrow & \{ \text{ definitie } \cup \text{ } \} \\
 & x \in A \wedge x \in (A \cup B) \\
\Rightarrow & \{ \text{definitie } \cap \} \\
 & x \in A \cap (A \cup B)
\end{array}
$$

Opgave 2. (10 pt)
Met de reguliere verzameling $\{p\,q, p\,p\,q\,q, p\,p\,q\,p\,q\,q, p\,p\,q\,p\,q\,p\,q\,q, p\,p\,q\,p\,q\,p\,q\,p\,q\,q, \ldots\}$ correspondeert de reguliere expressie $p(p\,q)^*q$.
Met de reguliere expressie $(p \vee q)\,r\,q^*$ correspondeert de reguliere verzameling

$$\{p\,r, q\,r, p\,r\,q, q\,r\,q, p\,r\,q\,q, q\,r\,q\,q, p\,r\,q\,q\,q, q\,r\,q\,q\,q, \ldots\}$$

Met de reguliere expressie $p\,(q\,q)^*\,r$ correspondeert de reguliere verzameling

$$\{p\,r, p\,q\,q\,r, p\,q\,q\,q\,q\,r, p\,q\,q\,q\,q\,q\,q\,r, \ldots\}$$

Opgave 3. (10 pt)
$k = 4$ is de kleinste integer k waarvoor $P(k)$ waar is. Stel $P(k)$ is waar: $10\,k < 3^k$. Dan

$$
\begin{aligned}
10\,(k+1) &= 10\,k + 10 \\
&< 3^k + 10 && (\mathit{inductiehyp.}) \\
&< 3^k + 3^k < 3^k + 3^k + 3^k && (k \geqslant 4) \\
&= 3 \cdot 3^k = 3^{k+1}
\end{aligned}
$$

Dus $P(k+1)$ is waar, dus $P(n)$ is waar voor alle $n \geqslant 4$.

Opgave 4. (5 pt)

$$y \diamond x = \frac{y+x}{2} = \frac{x+y}{2} = x \diamond y,$$

dus $\diamond$ is commutatief.

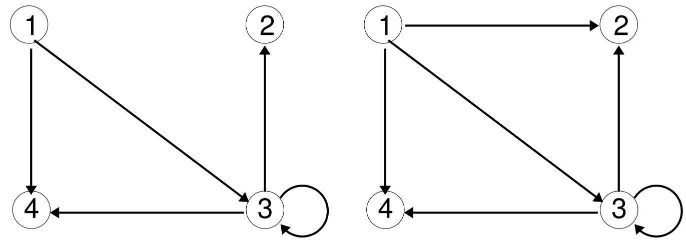
$$(x \diamond y) \diamond z = (\frac{x+y}{2}) \diamond z = \frac{\frac{x+y}{2} + z}{2} = \frac{x+y+2z}{4},$$

maar

$$x \diamond (y \diamond z) = x \diamond (\frac{y+z}{2}) = \frac{x + \frac{y+z}{2}}{2} = \frac{2x+y+z}{4},$$

dus $\diamond$ is niet associatief.

Opgave 5. (15 pt)



Figuur 1: Links: de graaf van R; rechts: de graaf van $\mathbf{t}(R)$

a. De graaf van R staat in figuur 1, links.

b.

$$\mathbf{M}_R = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

c. R is niet reflexief, want niet alle knopen hebben een relatie met zichzelf. R is niet symmetrisch, zo is er b.v. geen kant van 4 naar 1 terwijl er wel een kant van 1 naar 4 is. R is antisymmetrisch, want tussen verschillende knopen is hoogstens één kant. R is niet asymmetrisch: omdat er een kant is van 4 naar zichzelf is niet voldaan aan $(x, y) \in R \implies (y, x) \notin R$ voor alle $x, y \in A$.

d. $R^2 = \{(1, 2), (1, 3), (1, 4), (3, 2), (3, 3), (3, 4)\}$ en $R^{-1} \circ R = \{(1, 1), (1, 3), (3, 1), (3, 3)\}$.

e. De transitieve afsluiting van R is gelijk aan R^2. De graaf van $\mathbf{t}(R)$ staat in figuur 1, rechts.

Opgave 6. (10 pt)

- We bewijzen dat $V \subseteq f^{-1}(f(V))$.

  Stel $x \in V$. Omdat f totaal is, is er een $y \in B$ met $f(x) = y$, d.w.z. $(x, y) \in f$ en $y \in f(V)$. Dan ook $(y, x) \in f^{-1}$, d.w.z. $x = f^{-1}(y)$. Omdat $y \in f(V)$ geldt dus dat $x \in f^{-1}(f(V))$.

- We bewijzen dat $f^{-1}(f(V)) \subseteq V$.

  Stel $x \in f^{-1}(f(V))$. Dan is er een $y \in f(V)$ met $x = f^{-1}(y)$, oftewel $f(x) = y$. Omdat $y \in f(V)$ is er een $z \in V$ met $y = f(z)$. We hebben dus $y = f(x) = f(z)$. Omdat f injectief is, volgt dat $x = z$. En omdat $z \in V$ geldt dus ook $x \in V$.

Opgave 7. (5 pt)
f is injectief, want stel $f(n) = f(m)$, dan $2n = 2m$, dus $n = m$.
f is surjectief, want stel $m \in A$, dan is m van de vorm $m = 2n$, $n \in \mathbb{Z}^+$, dus $m = f(m/2)$.
f is overal gedefinieerd op $\mathbb{Z}^+$. Dus f is een bijectie tussen $\mathbb{Z}^+$ en A.

Opgave 8. (10 pt)
We weten dat $n! > 2^n$ voor $n \geqslant 4$. Dus $f(n) \leq g(n)$ voor $n \geqslant 4$, d.w.z., f is $O(g)$. Maar ook geldt dat er geen $k \in \mathbb{Z}^+$ is zodat $g(n) < f(n)$ voor $n \geqslant k$. Dus g is niet $O(f)$, en dus geldt ook niet dat $f \,\Theta\, g$.

Opgave 9. (15 pt)

a. Het enige minimale element is a, dit is tevens het kleinste element. Het enige maximale element is g, dit is tevens het grootste element.

b. Deelverzameling $\{b, c, d\}$: kleinste bovengrens is f en grootste ondergrens is b.
Deelverzameling $\{f, b\}$: kleinste bovengrens is f en grootste ondergrens is b.

c. $(A, \leq)$ is een tralie, want elk tweetal elementen van A heeft een kleinste bovengrens en een grootste ondergrens in A. Het tralie is begrensd: ondergrens a, bovengrens g. Het tralie is niet distributief. Neem b.v. de elementen e, c, d. Dan

$$e \wedge (c \vee d) = e \wedge f = e, \text{ maar } (e \wedge c) \vee (e \wedge d) = c \vee b = c$$

Dus geldt niet voor alle $a, b, c \in A$ dat $a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Opgave 10. (10 pt)
We gebruiken de substitutieregel: De eigenschappen van elke eindige Boolese algebra zijn precies die van het tralie $(P(U), \subseteq, \cup, \cap, ^-)$, met U een universele verzameling. Dus we gaan bewijzen dat voor alle deelverzamelingen A, B van U geldt: $B \cap (A \cup (\overline{A} \cap (B \cup \overline{B}))) = B$.

$$
\begin{aligned}
& B \cap (A \cup (\overline{A} \cap (B \cup \overline{B}))) \\
= & \{ \text{ distributiviteit } \} \\
& (B \cap A) \cup (B \cap (\overline{A} \cap (B \cup \overline{B}))) \\
= & \{ \text{ distributiviteit } \} \\
& (B \cap A) \cup (B \cap ((\overline{A} \cap B) \cup (\overline{A} \cap \overline{B}))) \\
= & \{ \text{ distributiviteit } \} \\
& (B \cap A) \cup ((B \cap (\overline{A} \cap B)) \cup (B \cap (\overline{A} \cap \overline{B}))) \\
= & \{ \text{ associativiteit en commutativiteit } \cap \} \\
& (B \cap A) \cup ((B \cap B \cap \overline{A})) \cup (B \cap \overline{B} \cap \overline{A})) \\
= & \{ \text{ idempotentie, complement } \} \\
& (B \cap A) \cup ((B \cap \overline{A}) \cup (\varnothing \cap \overline{A})) \\
= & \{ \text{ eigenschap lege verzameling } \} \\
& (B \cap A) \cup ((B \cap \overline{A}) \cup \varnothing) \\
= & \{ \text{ eigenschap lege verzameling } \} \\
& (B \cap A) \cup (B \cap \overline{A}) \\
= & \{ \text{ distributiviteit } \} \\
& B \cap (A \cup \overline{A}) \\
= & \{ \text{ complement } \} \\
& B \cap U \\
= & \{ \text{ eigenschap universele verzameling } \} \\
& B
\end{aligned}
$$